**Prof. Dr. Alfred Toth**

# Eine Darstellungsweise von Relationen über Relationen durch surreale Zahlen

1. Surreale Zahlen wurden von John Horton Conway (Conway 1996, S. 283 ff.) in die Mathematik eingeführt. Die Notation

{a, b, c, ... | d, e, f, ...}

bedeute „the simplest number strictly greater than all the numbers a, b, c, ... and strictly less than all the numbers d, e, f, …", wobei die exakte Bedeutung von "einfachster Zahl" zwar durch Beispiele erhellt, aber nicht definiert wird:

{ | } = 0, die einfachste Zahl von allen

{0 | } = 1, die einfachste Zahl > 0

{0, 1 | } = 2, die einfachste Zahl > 1 (und > 0), usw.

2. Die linke Seite der Gleichung { | } = 0 besteht somit aus 3 Teilen: einer theoretisch unendlichenMengen vo Zahlen links von |, dem Unter-schied | selbst, und einer theoretisch unendlichen Menge von Zahlen rechts von |. D.h., es ist z.B.

{ | 2} = 1 ≠ {2 | } = 3

{ | 2, 3, 4, ..., n} = 1 ≠ {2, 3, 4, ..., n | } = 3

{ | {2, 3, 4, ..., n}} = 1 ≠ {{2, 3, 4, ..., n} | } = 3.

Damit sind wir aber bei solchen surrealen Zahlen angekommen, die nicht nur als Mengen definiert werden, sondern auch Mengen enthalten. Das allgemeine Schema einer surrealen Zahl lautet demnach

{{a, b, c, ...} | {d, e, f, ...}}.

Nachdem dieser von Conway nicht gemachte Schritt vollzogen ist, hindert uns nun nichts mehr daran, auch Inklusionen von Mengen, oder allgemein: Relationen über Relationen zu definieren:

{{a}, {{b, c}, ...} | {{d}, {{e, f}, ...}}.

Es macht also einen wesentlichen Unterschied aus, ob man von der gewöhnlichen Primzeichenrelation

PZ = (1, 2, 3)

ausgeht und sie „surreal“ wie folgt definiert:

PZ = {{0 | }, {1 | }, {2 | }}

oder ob man von der „verschachtelten“ Definition von Bense (1979, S. 53) ausgeht

ZR = (M, (M → O), (M → O → I))

und sie surreal wie folgt definiert:

ZR = {{0 | }, {{1 | }, {2 | }}}.

Vielleicht können wir aber sogar noch einen Schritt weitergehen, denn als Primzeichenrelation kann ja jede Mengeninklusion der abstrakten Struktur

ZR = {{a | }, {{b | }, {c | }}}.

dienen. Somit können wir noch allgemeiner surreal definieren

PZR = { | {{a | }, {{b | }, {c | }}}}.

Durch einen Normalformoperator kann man nämlich z.B. die Zahlenfolge 17, 18, 19, 20, 21, ... auf die Zahlenfolge 1, 2, 3, 4, 5, ... abbilden:

$$\begin{array}{cccccc} 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \end{array}$$

Nun hat ja irgendwelche Teilfolge dreier aufeinanderfolgender, d.h. „einfachster“ Zahlen dieselbe mengentheoretische bzw. relationale Struktur:

(1, 2, 3) ↝ (2, 3, 4) ↝ (3, 4, 5) ↝ ... ↝ (n-2, n-1, n), d.h. eine Primzeichenrelation ist jede einfachste Menge (a, b, c) mit (a, (b, (c)), die grösser ist als irgendeine links von ihr stehenden Zahl.

## Bibliographie

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Conway, John Horton/Guy, Richard K., The Book of Numbers. New York 1996

25.2.2011